

8294

SA ARCHIEF

SM 82 r

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SM 82 r

Bepaling van een betrouwbaarheidsgebied voor de
variatiecoëfficiënt van een normale verdeling op
grond van een steekproef.

C. van Eeden.



1960

SA

~~RECHTEN~~ MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Receptuur

Bepaling van een betrouwbaarheidsgebied voor de variatiecoëfficiënt van een normale verdeling op grond van een steekproef *)

A confidence region for the coefficient of variation of a normal distribution.

Laat $x_1, \dots, x_n$ een steekproef uit een normale verdeling voorstellen met onbekend gemiddelde μ en onbekende spreiding σ . Gevraagd wordt op grond van deze waarnemingen een betrouwbaarheidsgebied te bepalen voor $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$.

Exacte methode

Een *exact* betrouwbaarheidsgebied kan gevonden worden met behulp van tabellen van N. L. Johnson and B. L. Welch (1940). Daartoe gaat men uit van de grootheid

$$(1) \quad t = \frac{\bar{x}}{s} \sqrt{n},$$

waarin

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \\ s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right\}. \end{cases}$$

De grootheid t bezit een niet-centrale t -verdeling met niet-centraliteitsparameter $\delta = \frac{\sqrt{n}}{\gamma} = \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{n}$ en aantal vrijheidsgraden $f = n - 1$.

Op grond van de voor t gevonden waarde t kan men nu, met behulp van de tabellen van Johnson and Welch, een betrouwbaarheidsinterval voor δ bepalen. Uit de relatie $\delta = \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{n}$ volgt dan een betrouwbaarheidsgebied voor $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$.

Het tweezijdige betrouwbaarheidsinterval voor δ met onbetrouwbaarheid α wordt

$$(3) \quad t - \lambda(f, t, \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{1 + \frac{t^2}{2f}} \leq \delta \leq t + \lambda(f, -t, \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{1 + \frac{t^2}{2f}},$$

*) Rapport S 261 (M81) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

waarin t de voor t gevonden waarde voorstelt en de coëfficiënten $\lambda(f, t, \frac{1}{2}\alpha)$ en $\lambda(f, -t, \frac{1}{2}\alpha)$ berekend kunnen worden met behulp van tabel IV van J o h n s o n and W e l c h. Hierbij gaat men als volgt te werk. Men neemt die bladzijde van tabel IV waarvoor $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$; voor de berekening van $\lambda(f, t, \frac{1}{2}\alpha)$ neemt men $t_0 = t$ en voor de berekening van $\lambda(f, -t, \frac{1}{2}\alpha)$ neemt men $t_0 = -t$. Vervolgens berekent men

$$(4) \quad \begin{cases} \text{als } \frac{t_0^2}{2f} \leq 0,75 & y' = \frac{t_0}{\sqrt{2f}} \left(1 + \frac{t_0^2}{2f}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{t_0}{\sqrt{2f + t_0^2}} \\ \text{als } \frac{t_0^2}{2f} \geq 0,75 & y = \begin{cases} \left(1 + \frac{t_0^2}{2f}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2f}{2f + t_0^2}} \text{ als } t_0 > 0 \\ -\left(1 + \frac{t_0^2}{2f}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2f}{2f + t_0^2}} \text{ als } t_0 < 0. \end{cases} \end{cases}$$

We kunnen nu de volgende twee gevallen onderscheiden

1. f is een in de tabel voorkomende waarde ($f = 4, 9, 16, 36, 144$).
Dan berekent men de grootte $\lambda(f, t_0, \frac{1}{2}\alpha)$ door lineaire interpolatie naar y' (of y) in de bij f behorende kolom.
2. f komt niet in de tabel voor. Dan kiest men twee waarden f_1 en f_2 uit de tabel zo dicht mogelijk bij f met $f_1 < f < f_2$ en berekent $\lambda(f_1, t_0, \frac{1}{2}\alpha)$ en $\lambda(f_2, t_0, \frac{1}{2}\alpha)$ beide door lineaire interpolatie naar y' (of y). De grootte $\lambda(f, t_0, \frac{1}{2}\alpha)$ wordt dan gevonden uit $\lambda(f_1, t_0, \frac{1}{2}\alpha)$ en $\lambda(f_2, t_0, \frac{1}{2}\alpha)$ door lineaire interpolatie naar $\frac{12}{\sqrt{f}}$.

Uit het interval (3) volgt, na deling door $\sqrt{n}$, een betrouwbaarheidsinterval voor $\frac{1}{\gamma} = \frac{\mu}{\sigma}$. De grenzen van dit interval kan men ook schrijven als functie van de in de steekproef gevonden variatie-coëfficiënt $c = \frac{s}{\bar{x}}$. Dit geeft

$$(5) \quad \frac{1}{c} \left[1 - \lambda(f, t, \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2f}} \right] \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{c} \left[1 + \lambda(f, -t, \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2f}} \right] \text{ met } t = \frac{\sqrt{n}}{c}.$$

Indien dit interval de waarde 0 niet bevat, dus als beide grenzen positief of beide grenzen negatief zijn, volgt uit (5) het interval

$$(6) \quad \frac{c}{1 + \lambda(f, -t, \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2f}}} \leq \gamma \leq \frac{c}{1 - \lambda(f, t, \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2f}}} \text{ met } t = \frac{\sqrt{n}}{c}$$

voor γ .

Als in (5) de ondergrens negatief en de bovengrens positief is, dan is het betrouwbaarheidsgebied voor γ geen interval, maar het gebied

$$(7) \quad \begin{cases} \gamma \geq \frac{c}{1 + \lambda(f, -t, \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2f}}} \\ \gamma \leq \frac{c}{1 - \lambda(f, t, \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2f}}} \end{cases} \quad \text{met } t = \frac{\sqrt{n}}{c}.$$

De bovenbeschreven betrouwbaarheidsgebieden zijn behoudens interpolatiefouten exact. Met behulp van de tabellen van Johnson en Welch kan men deze dus vinden voor iedere $f \geq 4$ en voor die waarden van ε , die in de tabel voorkomen.

Benaderingen

Voor grote waarden van f zijn een aantal benaderingen bekend voor het betrouwbaarheidsinterval voor δ . Zo'n benadering kan men als volgt vinden:

Het betrouwbaarheidsinterval voor δ bestaat uit alle bij toetsing op grond van de waarnemingen $x_1, \dots, x_n$ niet verworpen waarden δ_0 . De ondergrens δ_1 en de bovengrens δ_2 van het interval voldoen dus aan

$$(8) \quad \begin{cases} P[t \geq t | f, \delta_1] = \frac{1}{2}\alpha, \\ P[t \geq t | f, \delta_2] = 1 - \frac{1}{2}\alpha. \end{cases}$$

Een benadering voor δ_1 en δ_2 kan men dus vinden als men een benadering heeft voor de percentielen $t(f, \delta, \alpha)$ van de niet-centrale t -verdeling, waarbij dus

$$(9) \quad P[t \geq t(f, \delta, \alpha) | f, \delta] = \alpha.$$

Benaderingen voor $t(f, \delta, \alpha)$ zijn te vinden in C. van Eeden (1959). De eerste in par. 3.1 van dit rapport genoemde benadering voor $t(f, \delta, \alpha)$ is het geschiktst om benaderingen voor δ_1 en δ_2 te bepalen.

Deze benadering geeft

$$(9) \quad \begin{cases} \delta_1 \approx t \beta_f - u_{\frac{1}{2}\alpha} \sqrt{1 + t^2 (1 - \beta_f^2)}, \\ \delta_2 \approx t \beta_f + u_{\frac{1}{2}\alpha} \sqrt{1 + t^2 (1 - \beta_f^2)}. \end{cases}$$

Hierin is

$$(10) \quad \beta_f = \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{f} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)},$$

terwijl u_ε gedefinieerd wordt door

$$(11) \quad P[\underline{u} \geq u_\varepsilon] = \varepsilon \quad (\underline{u} \text{ is } N(0,1) \text{ verdeeld}).$$

Tabellen van β_f voor $f = 1 (1) 20 (5) 50 (10) 100$ zijn bijv. te vinden in E. S. P e a r s o n and H. O. H a r t l e y (1954, tabel 35).

Uit (9) volgt als benadering voor het interval voor $1/\gamma$

$$(12) \quad \frac{1}{c} \left[\beta_f - u_{1\alpha} \sqrt{\frac{c^2}{n} + 1 - \beta_f^2} \right] \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{c} \left[\beta_f + u_{1\alpha} \sqrt{\frac{c^2}{n} + 1 - \beta_f^2} \right].$$

Past men de derde benadering uit par. 3.1 van het bovengenoemde rapport toe, dan vindt men als benadering voor het interval voor $1/\gamma$

$$(13) \quad \frac{1}{c} \left[1 - u_{1\alpha} \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2f}} \right] \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{c} \left[1 + u_{1\alpha} \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2f}} \right].$$

Deze benadering, die in het algemeen minder nauwkeurig is dan (12), is bijv. te vinden in A. H a l d (1952, p. 302); hij komt neer op het vervangen van $\lambda(f, t, \frac{1}{2}\alpha)$ en $\lambda(f, -t, \frac{1}{2}\alpha)$ in (5) door $u_{1\alpha}$.

Voor zeer grote waarden van f zijn de twee benaderingen practisch identiek, daar

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \infty} \beta_f &= 1 \\ \lim_{f \rightarrow \infty} f(1 - \beta_f^2) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Voor een uitvoeriger beschrijving van deze benaderingen en hun nauwkeurigheid verwijzen wij naar het bovengenoemde rapport.

Literatuur

- [1] v a n E e d e n, C. (1959), Some approximations to the percentage points of the non-central t-distribution, Rapport S 242 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.
- [2] H a l d, A. (1952), Statistical theory with engineering applications, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [3] J o h n s o n, N. L. and B. L. W e l c h (1940), Applications of the non-central t-distribution, Biometrika 31, 362—389.
- [4] P e a r s o n, E. S. and H. O. H a r t l e y (1954), Biometrika tables for statisticians, Vol. I, Cambridge University Press.

Constance van Eeden
Statistische Afdeling van het
Mathematisch Centrum, Amsterdam.